फर्माचे शेवटचे प्रमेय

सोळाव्या - सतराव्या शतकांमध्ये ज्या देशांनी विद्येचे पुनरुज्जीवन (Renaissance) अनुभवले, त्यांमध्ये फ्रान्स हा अग्रेसर होता. या पुनरुत्थानाच्या काळात फ्रान्स - मध्ये अनेक विद्वान, शास्त्रज्ञ उदयास आले. अशाच एका विश्वविख्यात गणितज्ञाचा जन्म २० ऑगस्ट १६०१ साली फ्रान्समध्ये झाला. त्याचे नाव पियर (पिटर) डी फर्मा. तसं बघायला गेलं तर व्यवसायाने फर्मा हा कायदेतज्ञ होता पण व्यवसायाव्यतिरिक्त फावल्या वेळात तो गणिताचा अभ्यास व संशोधन करीत असे. असे असूनसुद्धा कितीतरी व्यावसायिक गणितज्ञांना लाजवेल इतके प्रगाढ ज्ञान फर्माकडे होते. म्हणूनच त्याला 'Prince of Amateur Mathematicians' ("अव्यावसायिक गणितज्ञांमधला राजा") असे संबोधले जाते.

Number Theory मध्ये फर्माचा हातखंडा होता. Number Theory ही आकडे व त्यांच्या गुणधर्मांशी निगडीत असलेली सर्वांत शुद्ध व सुंदर शाखा आहे. पण ह्या विषयातला त्याचा गुरु हा कोणी मनुष्य नसून 'डायोफॅन्टस' ह्या ग्रीक गणितज्ञाने लिहिलेला 'Arithmetica' हा ग्रंथ होय. त्याचा अभ्यास करताना त्याला जी नवीन सूत्रे हाती लागायची, ती तो पुस्तकाच्या समासामध्ये संक्षिप्त स्वरूपात लिहित असे आणि मग ही नवीन सूत्र तो जगातल्या इतर गणितज्ञांना सोडवण्यासाठी देऊन त्यांना हैराण करीत असे. परत त्या सूत्रांबरोबर असेही लिहिले जायचे की, 'माझ्याकडे ह्या सूत्राचे उत्तर आहे'. पण असे उत्तर असूनसुद्धा तो ते क्वचितच उघड करीत असे कारण त्याकाळात भयंकर गुप्तता पाळली जायची.

त्याच्या ह्या सूत्रांपैकीच सर्वांत महत्त्वपूर्ण सूत्र म्हणजे 'फर्माचे शेवटचे प्रमेय' (Fermat's Last Theorem). ह्या प्रमेयाला आपण 'FLT' असे म्हणूयात. हे सूत्र - देखील त्याने समासामध्ये लिहून पुढे असेही लिहिले की 'मी ह्या सूत्रासाठी अत्यंत सुंदर व अभिनव अशी सिद्धता शोधून काढली आहे; पण हा समास त्यासाठी खूपच छोटा असल्यामुळे ती इथे देण्यासारखी नाही.'

प्रथम आपण हे प्रमेय काय आहे ते पाहू. पण तत्पूर्वी आपल्या माहितीतला पायथागोरसचा सिद्धांत काय आहे तो पाहू. हा सिद्धांत असे सांगतो की, काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन निर्माण करणाऱ्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज ही त्याच्या hypotenuse च्या वर्गाइतकी असते. उदाहरणार्थ काटकोन तयार करणाऱ्या दोन बाजू जर ३ व ४ अशा असतील, तर hypotenuse ची संख्या ५ असते कारण $3^2+4^2=5^2$. म्हणजेच जर का आपल्याला कोणी $x^2+y^2=z^2$ असे समीकरण दिले

तर x, y, z ह्या तिघांचीही आपल्याला पूर्णांकांमध्ये उत्तरे मिळू शकतात, जसे की ३,४,५.

पण ~~[illegible]~~ FLT असे सांगते की $x^n + y^n = z^n$ असे समीकरण असेल आणि त्यात 'n' जर का दोनपेक्षा मोठा असेल, म्हणजेच ३,४,५,६,...... तर x, y, z हे एकाचवेळी पूर्णांक कधीच असू शकत नाहीत. प्रथम आपण $n=1$ आणि $n=2$ ह्या cases बघूया. $n=1$ असताना समीकरणाचे स्वरूप $x+y=z$ असे होते व इथे x, y, z ह्यांची पूर्णांकांमध्ये अगणित उत्तरे देता येतील हे सांगायला नकोच, उदा: $२+६=८$, $११+२३=३४$ इ. $n=2$ असतानादेखील हे शक्य आहे हे आपण पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार वरती पाहिले आहे.

पण जर n हा २ पेक्षा मोठा असेल, समजा ३, तर समीकरण $x^3+y^3=z^3$ असे होते. अशावेळेस x, y, z हे तिन्ही एकाच वेळेस पूर्णांक असू शकत नाहीत. उदा:- आपण x, y जर का पूर्णांकांमध्ये घेतले, समजा $x=1, y=2$, तर वरील समीकरणानुसार z ची किंमत $\sqrt[3]{9}$ = अशी येते, म्हणजे पूर्णांकामध्ये येत नाही. 'n' च्या इतर संख्यांच्या वेळेसही, म्हणजे n ४,५,६,७..... असतानाही असेच होते.

ह्यालाच FLT म्हणतात. हा समजायला खूप सोपा आहे नाही का? n ची २ पेक्षा मोठी अशी कोणतीही संख्या घ्या आणि x, y ची किंमत पूर्णांकांमध्ये असल्या-स z कधीच पूर्णांक नाही असू शकणार. तसेच y, z जर पूर्णांकांमध्ये घेतले तर, x हा पूर्णांक नाही होऊ शकणार. पण समजायला अत्यंत सोप्या असणाऱ्या ह्या प्रमेयाची सिद्धता शोधण्याचा प्रयत्न करणाऱ्या सर्व गणितज्ञांच्या नाकी नऊ आले. पण आपल्याला हा प्रश्न पडतो की जर का हे प्रमेय दिसायला एवढे सोपे आहे तर मग सिद्धतेची काय गरज? ~~ब~~ आपण एक दोन उदाहरणं बघून नक्कीच बघू शकतो ना? पण हे बरोबर नाही. ते आपल्याला चुकीच्या दिशेने नेऊ शकते. म्हणजे, n च्या पहिल्या ५० लाख किंमतींसाठी हे प्रमेय खरे ठरत असेल, तरीही ते पुढेही खरे असेल कशावरुन? कदाचित ते खोटेही असू शकते. म्हणूनच 'n' च्या काही विशिष्ट किंमतींसाठी जरी का ते खरे असेल, तरी ते पुढेही ~~सत~~ बरोबरच आहे असे आपण म्हणू शकत नाही. पण एकदा का कोणी त्याची निर्विवाद सिद्धता दिली, जी ~~की~~ ~~[illegible]~~ ~~की~~ 'n' च्या सर्व संख्यांसाठी ~~[illegible]~~ लागू पडते, की मग ते प्रमेय हे निर्विवाद सत्य आहे असे आपण ठामपणे म्हणू शकतो. कुठल्याही प्रमेयासाठी सिद्धता आवश्यकच आहे. आणि हे केवळ गणितासाठीच नव्हे तर कुठल्याही विषयासाठी.

तर अशा ह्या प्रमेयाने त्याचीच सिद्धता शोधणाऱ्यांच्या सर्व आशा धुळीस मिळवल्या. ऑयलर, गाऊस ह्यांसारख्या असामान्य दिग्गज प्रभृतींनाही जिथे हात टेकावे लागले तिथे इतरांची काय गत? म्हणजे त्यामध्ये काहीच प्रगती झाली नव्हती असे नव्हे. उदा:- ऑयलरने n=3 साठी त्याची सिद्धता दिली होती. तसेच इतरांनीही n च्या विशिष्ट किंमतींसाठी त्याची सप्रमाण सिद्धता दिली होती. पण n च्या २ नंतर-च्या सगळ्या किंमतींसाठी चालणारी एकही सिद्धता नव्हती. वर्षे उलटली, दशकं, तपं उलटली, इतकेच काय, शतकेही उलटली! पण FLT कोणीच सिद्ध करू शकत नव्हते.

पण १६३७ साली फर्माने हे प्रमेय सांगितल्यावर ३५७ वर्षांनी म्हणजेच केवळ दहा वर्षांपूर्वी म्हणजे ऑक्टोबर १९९४ साली अॅन्ड्र्यु वाईल्स ह्या गणितज्ञाने त्याची सप्रमाण सिद्धता दिली. म्हणजे त्याने एकट्याने ती पूर्णपणे शोधली असे म्हणणे गैर होईल, कारण ३०० वर्षे इतर गणितज्ञांनी जे काही अविरत प्रयत्न केले होते, त्यातून सिद्धता जरी निष्पन्न झाली नव्हती, तरी त्यामधून जे नवे संशोधन निर्माण झाले होते, ते अमूल्य होते व वाईल्स ह्यांनी त्यातल्या काही संकल्पनांचा वापर आपल्या सिद्धतेमध्ये केला होता.

पण ३५७ वर्षे हा केव्हा तरी प्रचंड काळ आहे आणि जगात आत्तापर्यंत ह्या प्रमेयाची केवळ एकच सिद्धता उपलब्ध आहे ती म्हणजे वाईल्स ह्यांची. म्हणजे ह्या काळात त्याच्या हजारोंनी सिद्धता दिल्या गेल्या होत्या. पण त्यापैकी एकही अचूक नव्हती. वाईल्स ह्यांची सिद्धता १०८ पानांची आहे. आपल्याला एका पानाच्यावर गणित दिसले की तोंडातून लगेच 'अबब.....' असे शब्द फुटतात, तर १०८ पानांच्या गणिताची केवळ कल्पनाच केलेली बरी. शिवाय त्यातल्या प्रत्येक पानावरचा मजकूर हा अत्यंत क्लिष्ट व सखोल आहे आणि तसुद्धा सात वर्षांच्या अथक प्रयत्नांनतर ते त्या सिद्धतेप्रत आले. सध्या ते प्रिन्स्टन युनिव्हर्सिटीमध्ये आहेत. तर आपण ह्या तपस्व्याच्या जीवनाचा थोडक्यात आढावा घेऊ.

अॅन्ड्र्यु वाईल्स यांचा जन्म केंब्रिज येथे ११ एप्रिल १९५३ साली झाला. त्यांचे वडील थिऑलॉजीचे प्राध्यापक होते. लहानपणापासूनच अॅन्ड्र्युच्या ठायी गणिता-साठी अपार प्रेम वसत असे. गणिताची कोडी सोडवणे हे तर त्याच्या अत्यंत आवडीचे

होते. नवीन नवीन कोड्यांची पुस्तके आणून त्यातली कोडी केवळ सोडवून त्याचे भागत ~~असे~~ नसे तर त्याहीपुढे जाऊन तो स्वतःची अशी नवीन कोडी देखील बनवत असे.

दहा वर्षांचा असताना एके दिवशी तो मिल्टन रोडवरच्या एका अभ्यासिकेमध्ये गेला होता. तिथे त्याला "The Last Problem" नावाचे एक बेल ह्यांचे पुस्तक सापडले. त्यामध्ये FLT बद्दलची माहिती दिली होती. पण उत्तर नव्हते. हे पाहून ॲन्ड्रयू इतका विस्मित झाला कारण हे समजायला अत्यंत सोपे असे कोडे होते पण ~~त्याची~~ ते अजून सिद्ध झाले नव्हते. त्याला वाटले की कदाचित कोणालाच न ~~नसले~~ सुचलेली अशी सर्वतोपरी सुंदर अशी ह्याची सिद्धता असेल व ती आपण शोधलीच पाहिजे. त्याचक्षणी ॲन्ड्रयूने दृढनिश्चय केला की, "मी हे कोडे सोडवणारच."

त्या दिवसापासून त्याने त्या कोड्याचा असा काही ध्यास घेतला की कॉलेजात असेपर्यंत त्याने त्या विषयावरची बहुसंख्य जर्नल्स तसेच बऱ्याच गणितज्ञांचे ग्रंथ कोळून प्यायले होते. पण जेव्हा तो ग्रॅज्युएट होण्यासाठी केंब्रिज विश्वविद्यालया-त दाखल झाला, तेव्हा मात्र काही काळासाठी त्याला हा छंद बाजूस ठेवणे क्रमप्राप्त ठरले. ~~त्यानंतर~~ नंतर पी.एच.डी साठी डॉ. जॉन कोट्स् हे त्याचे ॲडव्हायझर होते. त्यांना त्यांच्या मित्राने ॲन्ड्रयूला आपला विद्यार्थी करा असा आग्रह धरला होता. कोट्स् यांनाही ॲन्ड्रयूच्या बुद्धीची प्रगल्भता चांगलीच ठाऊक होती व तो अत्यंत प्रतिभाशाली गणितज्ञ बनेल ह्याबद्दल त्यांच्या मनात अजिबात किंतु नव्हता. पी.एच.डी साठी कोणता विषय त्यांच्या ह्या हुशार विद्यार्थ्यास उपयुक्त ठरेल ह्या विचारात असतानाच "Elliptic Curves" ह्या विषयावरचा अभ्यास हा ॲन्ड्रयूच्या जीवनाला कलाटणी देईल व त्याच्या बालपणीच्या स्वप्नाच्या पूर्ततेसाठीही उपयोगी पडेल असे त्यांना वाटले.

तदनुसार ॲन्ड्रयूने त्याचा झपाट्याने अभ्यास सुरु केला. पुढे व्यावसायिक गणितज्ञ झाल्यावर त्याने आपली संपूर्ण शक्ती FLT साठी समर्पित करण्याचे ठरवले. कितीतरी व्यावसायिक गणितज्ञ स्वतःला ह्यापासून दूरच ठेवू पाहत होते कारण संपूर्ण आयुष्य वेचले तरी ही लढाई आपण जिंकूच ~~ह्याची~~ ही शाश्वती बाळगणे म्हणजे स्वतःलाच फसवणे होय हे त्यांना पुरते ठाऊक होते. इतिहासच त्याला साक्षी होता. त्यामुळे आपले करीअर वाया घालवण्या-साठी ते अजिबात तयार नव्हते. पण ॲन्ड्रयूने विचार केला की जरी आपल्याला हे कोडे सुटले नाही, तरी त्या प्रयत्नांमधून तयार होणारे गणित हे नक्कीच

उपयोगी ठरेल. त्यामुळे FLT साठी आपले संपूर्ण जीवन वेचण्यास तो तयार झाला.

FLT जरी सर्वांना हुलकावणी देत होते तरी त्याप्रत पोहोचण्यासाठीच्या प्रयासामधून बरेच नवे संशोधन तयार झाले होते. ऑयलर, सोफीया जर्मेन, लॅमे, कोशी इ. बऱ्याच जणांनी FLT मध्ये नवे breakthroughs केले होते. FLT च्या सिद्धतेसाठी अनेक पारितोषिकेही घोषित करण्यात आली होती, जसे जर्मनीमधल्या गॉटिंजेन विद्यापीठाच्या रॉयल सोसायटी ऑफ सायन्सेस च्या वोल्फस्केल संस्थेने FLT ची सिद्धता शोधण्यासाठी 10000 मार्क्स (जर्मनीचे चलन) एवढे पारितोषिक घोषित केले. तेव्हापासून विद्यापीठाकडे जगातल्या विविध गणितज्ञांकडून हजारोंनी सिद्धता यायला लागल्या. पण वर म्हटल्याप्रमाणे त्यापैकी एकही अचूक नव्हती. पण ह्या दररोजच्या येणाऱ्या पत्रांमुळे विद्यापी-ठातल्या लोकांना बराच त्रास सोसावा लागला.

FLT ची शोधप्रक्रीया थंड पडत असतानाच दुसऱ्या महायुद्धानंतर जपान-च्या दोन गणितज्ञांनी म्हणजे, युटाका तानियामा व गोरो शिमुरा यांनी एक आश्चर्यकारक विधान केले. गणितामध्ये "Elliptic curves" चा अभ्यास करणारी एक शाखा तर "modular forms" चा अभ्यास करणारी दुसरी शाखा आहे. या दोन शाखा एकमेकांपासून सर्वतोपरी भिन्न शाखा मानल्या गेल्या होत्या. म्हणजे १९५५ पर्यंत तरी त्यांचा पूर्णपणे स्वतंत्र असा अभ्यास केला गेला होता. त्यांच्यामध्ये यत्किंचितही साम्य असेल असं कोणालाच वाटले नव्हते. पण तानियामा व शिमुरा ह्यांनी एक खळबळजनक विधान केले ते म्हणजे – "प्रत्येक elliptic curve हा modular असतो". हे विधान इतके विस्मित करणारे व काळाच्या पुढे होते की कोणाचाही त्यावर विश्वास बसला नाही. खरंतर कुठल्याही elliptic curve चे व त्याच्या तत्सम modular form चे विश्लेषण केल्यास दोन्ही सारखेच येत होते. पण म्हणून सर्वच elliptic curves हे modular आहेत असे म्हणणे बरोबर नाही असे सर्वांनाच वाटत होते. ते सिद्ध झाले नसल्यामुळे त्याला "शिमुरा-तानियामा" गृहीतक (Shimura-Taniyama conjecture) असे म्हटले जात होते.

ह्या शोधामुळे गणिती जगाचा कल्पनातीत फायदा होणार होता कारण वरवर पूर्णपणे भिन्न वाटणाऱ्या शाखा वस्तुत: एकच आहे हे समजल्याने

एका शाखेतली गणितं दुसऱ्या शाखेत जाऊन सोडवणे शक्य होणार होते. पण त्याचा एक महत्त्वपूर्ण फायदा म्हणजे 'फ्रे' ह्या गणितज्ञाने असे दाखवून दिले की शिमुरा-तानियामा गृहीतक खरे ठरल्यास FLT सिद्ध होते' फ्रे चा हा शोध १९८६ मध्ये केन रिबेट ह्या गणितज्ञाने सिद्ध केला. ह्यामुळे FLT च्या शोधप्रक्रियेला जीवनदान लाभले होते, म्हणजे एक निश्चित दिशा प्राप्त झाली होती. ती अशी की, शिमुरा-तानियामा गृहीतक सिद्ध करा, म्हणजे FLT सिद्ध झालाच !

आता ॲन्ड्रु वाईल्स यांनी हे गृहीतक सिद्ध करण्याचा चंगच बांधला. ह्या ध्यासाखातर त्यांनी conferences ना वगैरे जाणे पूर्णत: बंद केले. इतकेच नव्हे तर FLT शी संबंधित नसलेल्या सर्व गोष्टी त्यांनी बाजूस सारल्या. पण त्यांचा कुठेच सहभाग नसल्यामुळे त्यांची Mathematical productivity संपली असे त्यांच्या सहगणितज्ञांना वाटू लागले. वस्तुत: सत्य वेगळेच होते. वाईल्स ह्यांनी संपूर्ण एकांतात राहून, आपली सर्व शक्ती पणाला लावून काम चालू केले होते. ते म्हणतात, "सकाळी उठल्यापासून रात्री झोपेपर्यंत माझ्या मनात तेच चालू असायचे." आणि हे थोड्या दिवसांसाठी नव्हे तर तब्बल सात वर्षे !! आपण काय करीत आहोत याचा थांगपत्ता मात्र त्यांनी कुणालाही लागू दिला नाही.

ह्या सात वर्षांच्या काळात त्यांनी केवढेतरी सुंदर नवीन सिद्धांत शोधले होते. जरी त्यातून FLT ची सिद्धता निष्पन्न झाली नसती तरी त्यातले शोध हे गणितज्ञांसाठी एक अमूल्य खाद्य होते. पण हे संशोधन केलेले अचूक आहे की नाही हे पडताळण्यासाठी त्यांनी ते अशा एका विश्वासू माणसास दाखवावेसे वाटले, जो बाहेर कुठेही सांगणार नाही. कारण त्यांचे कार्य अजून पूर्ण झाले नव्हते, त्यामुळे ते जर का कोणाला कळले असते तर ते पूर्ण करून वाईल्स यांना मिळणार असलेले श्रेय त्याला मिळाले असते. म्हणून हे टाळण्यासाठी त्यांनी एक अपूर्व योजना आखली. त्यांनी त्यांच्याच Department मधल्या निक कॅट्झ यांना सांगायचे ठरवले. पण ते समजावणे काही मिनिटांचे काम नव्हते, तर त्यासाठी कितीतरी दिवस लागणार होते. म्हणून त्यांनी "Calculation of elliptic curves" नावाचा विषय शिकवण्यास सुरवात केली व त्या Lectures साठी ग्रॅज्युएट विद्यार्थ्यांबरोबर डॉ. कॅट्झ सुद्धा बसू लागले. विषयाचे नाव सुद्धा असे निवडले होते की ह्याचा FLT शी काही संबंध आहे याचा तिळमात्र संशय येणार नाही. अशा तऱ्हेने त्यांनी आपण केलेले सर्व शोध बरोबर आहेत की नाही हे कॅट्झ यांच्याकडून

पाडताळून पाहिले व कॅट्स यांनीही त्यावर शिक्कामोर्तब केले

त्यानंतर थोड्याच काळामध्ये वाईल्स अंतिम सिद्धतेप्रत आले. त्यावेळेस त्यांचा आनंद गगनात मावेनासा होता. कारणही तसेच होते. अशक्य म्हणून गणलेली गोष्ट त्यांनी शक्य करून दाखवली होती. याचदरम्यान केंब्रिज विद्यापीठाच्या आयझॅक न्यूटन इन्स्टिट्यूट मध्ये Number theory चा एक मोठा conference आयोजित केला होता. जगविख्यात Number theorists तिथे जमा होणार होते. वाईल्स यांनी आपली सिद्धता तिथे सर्वांसमोर मांडायचे ठरवले. त्यांना त्यामध्ये बोलावणे आले होते व त्यांची २ लेक्चर्ससुद्धा आयोजित केली होती. पण त्यांनी अजून एका लेक्चरसाठी मागणी केल्यावर वाईल्स आपला महत्त्वपूर्ण शोध करणार असा संशय आयोजकांना आला. म्हणून सर्वत्र कुजबूज सुरु झाली. पण नेमके काय बोलणार आहेत हे कोणालाच ठाऊक नव्हते.

सारे सभागृह गच्च भरले होते. वाईल्स यांनी बोलण्यास सुरवात केली. आपण केलेले अनेक सुंदर शोध श्रोत्यांस दाखवून त्यांना मंत्रमुग्ध केले. दुसऱ्या लेक्चरच्या अखेरीस श्रोत्यांना कळून चुकले की ते FLT च्या संदर्भात काही महत्त्वपूर्ण शोध मांडणार आहेत. त्यामुळे तिसऱ्या लेक्चरला अजूनच गर्दी! काही लोक त्यामागचे गणित समजून घेण्यासाठी आसुसले होते, तर काही केवळ तो ऐतिहासिक क्षण अनुभवण्यासाठी. वाईल्स आता त्यापुढे काय बोलतील याचे सर्वांनाच कुतूहल होते. तिसऱ्या लेक्चरच्या अखेरीस मूळ मुद्द्याजवळ आल्यानंतर, "I think I'll stop here". असे उद्गार काढले. समजणाऱ्यांसाठी ते वाक्य पुरेसे होते. FLT सिद्ध झाले होते! कितीतरी वेळ टाळ्यांचा कडकडाट व स्तुतिसुमनांचा वर्षाव होत होता. लोक एकमेकांकडे बघून आपण खरेच सत्य अनुभवतोय का अशी मनोमन पृच्छा करीत होते. वाईल्सही सद्गदीत झाले.

FLT च्या सिद्धतेचा overview त्यांनी तिथे मांडला होता. पण त्यातल्या एकन्एक गोष्टींचा तपास व्हावयाचा होता. याचे कारण म्हणजे सिद्धतेमधले एका जरी विधानाला पुरावा नसला किंवा एखादे विधान गृहीत धरून ती पुढे गेली असल्यास संपूर्ण सिद्धता चुकीची ठरू शकते आणि अशा चुकीच्या सिद्धता आगोदर कितीतरी जणांनी दिल्या होत्या. म्हणून Referring ची गरज होती. त्यासाठी

सहा रेफरी नेमले गेले. वस्तुत: २-३ च नेमले जातात. पण ही सिद्धता इतकी क्लिष्ट व सखोल होती की ब एकट्यान तिचा तपास करणे ही अशक्य कोटीतील गोष्ट होती. प्रत्येकाला तपासासाठी स्वतंत्र विभाग दिला होता. त्यापैकी कॅट्झ यांना तिसरा विभाग दिला होता. कुणीही मध्ये अडखळल्यास तो वाईल्स यांच्याशी बातचीत करून सोडवून घेत असे. असे अनेक प्रश्न वाईल्सनी सप्रमाण सोडवले.

पण कॅट्झ यांनी एक प्रश्न विचारला आणि वाईल्सनी त्याचे उत्तर दिलेही. पण त्याने समाधान न होता त्यांनी ते परत समजावण्यास सांगितले. पण परत सांगूनही कॅट्झ असमाधानीच होते. त्यांना त्या भागामध्ये एक अत्यंत दु:सह अशी चूक सापडली होती ज्याचा संपूर्ण निवाडा वाईल्स यांनी केला नव्हता. वाईल्सनाही ती चूक लक्षात आली आणि त्यांच्या डोळ्यांसमोर अंधार दाटला. ते FLT सिद्ध करू शकले नव्हते! त्यांनी Kolyvagin-Flach पद्धतीचा वापर करताना एक गोष्ट गृहीत धरली होती आणि ते नेमके तिथेच चुकले! ते ती चूक दुरुस्त करण्याचा प्रयत्न करू लागले.

पण समस्या अशी होती की त्यांपुढे सिद्धता मांडून बराच काळ लोटला होता. रेफरींगसाठी थोड्याच दिवसांची मुदत असते आणि तोपर्यंत ती लोकांमध्ये जाहीर केली जात नाही. पण ही मुदत ओलांडून गेल्यामुळे लोक नाना तऱ्हेचे संशय घेऊ लागले व ती सिद्धता छापण्यास विनवू लागले. पण वाईल्सनी त्यास नकार दिला कारण छापल्यानंतर कुणी दुसऱ्याने ती चूक सुधारल्यास FLT सिद्ध करण्याचे श्रेय त्या माणसास गेले असते. पण बोलूनही त्यांना भरपूर तणाव होता.

वाईल्स परत संपूर्ण एकांतात राहून ती चूक दुरुस्त करण्याचा आतोनात प्रयत्न करू लागले. पण काही केल्या ती चूक सुधरत नव्हती. त्यांची पत्नी नॉडा हिला "तुला वाढदिवसाला काय हवे?" असे त्यांनी विचारल्यास "मला बाकी काही नको, फक्त FLT ची सिद्धता हवी", असे सांगितले. तिचा वाढदिवस ऑक्टोबर महिन्यात होता. पण तिची ही इच्छा ते पूर्ण करू शकले नाहीत. सिद्धतेच्या एका भागामध्ये काही बदल करायला गेल्यास इतर भाग पूर्ण बदलत होते व संपूर्ण सिद्धता कोलमडत होती. त्यांनी आपले हे दु:ख पिटर सार्नाक ह्या त्यांच्या मित्राला सांगितले. त्यावर त्यांनी वाईल्सना एका अशा माणसाची गरज आहे

जो ते जे सांगतात ते पूर्णपणे समजून घेऊन ती चूक सुधारण्यास मदत करू शकेल, असे सांगितल्यावर वाईल्सनाही ते पटले. म्हणून त्यांनी हार्वर्ड विद्यापीठाच्या 'रिचर्ड टेलर' यांना बोलावून घेतले. Taylor हे वाईल्स यांचेच पूर्वशिष्य होते. दोघेही मिळून ती समस्या हल करण्याचा प्रयत्न करू लागले. तरी ~~यश कुठेच दृष्टिपथात नव्हते~~ दृष्टिपथात कुठेच यश दिसत नव्हते. जास्त दिवस लोकांपासून लपवून ठेवणेही गैर आहे हे जाणून त्यांनी सप्टेंबर १९९४ पर्यंत काहीच प्रगती न झाल्यास आपण हारलो असे घोषित करू असे ठरवले. पण चूक जरी सुधारली गेली नाही तरी असे नेमके का होतंय हे तरी शोधावे अशी त्यांची इच्छा होती.

पण नशिबात काही वेगळेच होते. ऑक्टोबर महिन्यात एके दिवशी असेच ते त्या चुकीच्या भागावर नजर टाकत असताना चमत्कारिकरित्या त्यांना असे आढळून आले की Kolyvagin-Flach पद्धत इथे जरी पूर्णपणे लागू पडत नसली तरी मागे त्यांनी अपयशानंतर ज्या Iwasawa Theory चा वापर करणे सोडून दिले होते, त्यासाठी ही पद्धत अगदी पूर्णपणे बरोबर वापरली जाऊ शकत होती. म्हणजे दोन्ही एकमेकांना परस्परपूरक होत्या. हे पाहून त्यांना इतका आनंद झाला कारण आता ती चूक सुधारली गेली होती. आता त्यांनी खरेच FLT ची निर्विवाद सिद्धता शोधली होती. हे सारे इतके अद्भूत होते की त्यांचा त्यावर विश्वासच बसेना! ते सारखे येरझारा घालीत व परत त्या कागदांजवळ येऊन ते तिथेच आहेत ना हे पाहीत.

दुसऱ्या दिवशी सकाळी उठून परत सर्व बरोबर आहे ना, हे त्यांनी पाहिले व धावत जाऊन पत्नीला म्हणाले, "I've got it! I've got it! I've solved FLT" मागच्या ऑक्टोबर महिन्यात जरी ते तिला सिद्धता देण्यास असमर्थ ठरले होते, तरी ह्या ऑक्टोबरमध्ये त्यांनी ते खरे करून दाखवले!

ही खबर जगभर वाऱ्यासारखी पसरली. अखेर त्यांनी विजयश्री खेचून आणलीच. आपले बालपणीचे स्वप्न सत्यात उतरवले. त्यांच्या सात वर्षांच्या मेहनतीचे चीज झाले होते. त्यासंबंधी त्यांनी खालीलप्रमाणे सांगितले आहे —

Perhaps I can best describe my experience of doing Mathematics in terms of a journey through a dark unexplored mansion. You enter the first room of the mansion and it's completely dark. You stumble around bumping into the furniture, but gradually you learn where each piece of furniture is. Finally, after six months or so, you find the light switch, you turn it on, and suddenly it's all illuminated. You can see exactly where you were. Then you move into the next room and spend another six months in the dark. So each of these breakthroughs, while sometimes they're momentary, sometimes over a period or two, they are the culmination of – and couldn't exist without – the many months of stumbling around in the dark that proceeds them.' ह्यावरूनच, कोणतीही गोष्ट अचानक किंवा लगेच प्राप्त होत नसते, ~~तर~~ ~~त्यासाठी~~ तर ती मिळवण्या-करिता वर्षानुवर्षे जिद्दीने व चिकाटीने परिश्रम करावे लागतात, हे दिसून येते.

त्यांचे आणखी एक वाक्य अतिशय सुंदर आहे. कुणालाही, मग तो शास्त्रज्ञ असो, कलाकार असो वा नियमित ध्यानसाधना करणारी अध्यात्मिक व्यक्ती असो, नवीन गोष्ट कशी सुचते किंवा तो पुढच्या पातळीवर कसा जातो, ह्यासंबंधी ~~ते~~ ~~स्वतःच~~ ~~To lead upto~~ त्यांचे FLT च्या शोधाबद्दलचे उदाहरण देताना म्हणतात — 'To lead upto a new kind of idea there has to be a long period of tremendous focus on the problem without any distraction. You have to really think about nothing but that problem – just concentrate on it. Then you stop. Afterwards there seems to be a kind of period of relaxation during which the subconscious appears to take over, and it's during that time so that some new insight ~~a~~ comes.'

पण त्यासाठी हवे ते 'one-pointed attention'. त्यांनीही चिकाटीने सात वर्ष अभ्यास केल्यामुळेच अशक्य कोटीतील गोष्ट प्राप्त झाली. खरंच

'असाध्य ते साध्य । करिता सायास ।
कारण अभ्यास । तुका म्हणे ।'

ही संत तुकारामांची ओवी त्यांनी खरी करून दाखवली.